Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

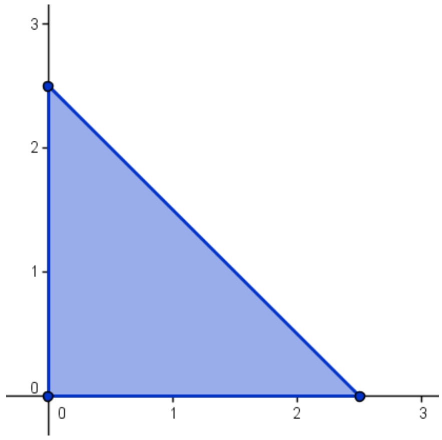
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 8

Eine stetige Funktion nimmt immer auf einer kompakten Menge in $\mathbb{R}^n$ ihre globalen Extrema an. Bei stetig partiell differenzierbaren Funktionen kann man sie analog wie im eindimensionalen Fall bestimmen. Nämlich, die Extrema können im Inneren oder auf dem Rand liegen. Im ersten Falle geht es um ein lokales Extremum, also muss dort $Df = 0$ gelten. Das Verhalten auf dem Rand muss separat untersucht werden. Allerdings ist das in höheren Dimensionen aufwendiger als in der Dimension 1, wo der Rand eines Intervalls nur aus zwei Punkten besteht.



In der Aufgabe 4 werden die globalen Extrema auf dem abgebildeten Dreieck gesucht. Der Rand des Gebiets sind hier die drei Seiten des Dreiecks. Die Kandidaten für die Extrema sind also die lokalen Extrema im Inneren und die Extremwerte auf den Seiten.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 29. Juni 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{N\times n}$ sei $\langle A, B\rangle := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$.

(a) Zeigen Sie, dass mit dieser Vorschrift ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{N\times n}$ definiert ist.

(b) Die zugehörige Norm $|A| := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ heißt Frobenius-Norm. Zeigen Sie, dass für beliebige $A \in \mathbb{R}^{N\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt: $|AB| \le |A||B|$.

2. Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom um den Ursprung von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) := 2x + (1 + y)^2 \cdot \sin(x + z)$$

und berechnen Sie damit den Näherungswert von $1{,}1^2 \cdot \sin 0{,}3$.

3. Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

auf lokale Extrema. Besitzt Sie auch globale Extrema auf $\mathbb{R}^2$?

4. Bestimmen Sie das Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := xy^2(3 - x - y)$$

auf dem (abgeschlossenen) Dreieck mit den Ecken in $(0,0)$, $(0,\frac{5}{2})$ und $(\frac{5}{2},0)$.